1.

SULLE TANGENTI SFERO-CONIUGATE. [1]

Annali di Scienze matematiche e fisiche compilati da B. TORTOLINI, tomo sesto (1855), pp. 382-392.

Sia data una superficie qualsivoglia, rappresentata dall'equazione $\varphi(x, y, z) = 0$, e siavi in essa una linea (a) individuata; e s'imagini la superficie sviluppabile tangente la superficie qualsivoglia lungo quella linea. La retta caratteristica della superficie sviluppabile e la retta tangente la linea (a), nel punto comune a questa linea ed alla caratteristica, chiamansi, com'è notissimo, *tangenti coniugate*, e la teorica di esse è dovuta a DUPIN.

In luogo della superficie sviluppabile immaginiamo ora una qualsiasi superficie inviluppante una famiglia di superficie, le quali abbiano un contatto di un ordine qualunque colla superficie $\varphi = 0$ lungo la linea (a); le rette tangenti questa linea e la caratteristica della superficie inviluppante hanno fra di loro una relazione di reciprocità, di cui la teorica delle tangenti di DUPIN non è che un caso particolarissimo. È all'illustre prof. BORDONI che si deve il merito d'aver così trattata la quistione nel modo più generale possibile, mentre essa era ancora nello stato in cui l'aveva lasciata DUPIN. Quest'importante generalizzazione forma lo scopo di una nota del suddetto professore, inserita nel tomo I degli Opuscoli Matem. e Fisici pubblicati in Milano nel 1832.

Qui si esporranno alcune proprietà, le quali hanno luogo nel caso che la superficie inviluppante abbia colla data un contatto di primo ordine, e le sue inviluppate siano sferiche.

Sia $f(p, q, r) = 0$ l'equazione delle inviluppate tangenti la superficie data lungo la linea (a); le due rette toccanti, l'una questa linea, l'altra la caratteristica della superficie inviluppante, nel punto ad esse comune, possono chiamarsi *coniugate*, denotando col nome di *coniugate ordinarie* quelle di cui DUPIN ha dato la teorica. Siano a_1, b_1, c_1; α, β, γ, i coseni degli angoli che le tangenti coniugate fanno con tre assi ortogonali; e chiaminsi X, Y, Z, A, B, C, G, H, K ; P, Q, R, D, E, F, S, T, U i valori delle derivate parziali

$$\frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz},\ \frac{d^2\varphi}{dx^2},\ \frac{d^2\varphi}{dy^2},\ \frac{d^2\varphi}{dz^2},\ \frac{d^2\varphi}{dy\,dz},\ \frac{d^2\varphi}{dx\,dz},\ \frac{d^2\varphi}{dx\,dy};$$

$$\frac{df}{dp},\ \frac{df}{dq},\ \frac{df}{dr},\ \frac{d^2f}{dp^2},\ \frac{d^2f}{dq^2},\ \frac{d^2f}{dr^2},\ \frac{d^2f}{dq\,dr},\ \frac{d^2f}{dp\,dr},\ \frac{d^2f}{dp\,dq},$$

corrispondenti al punto di coordinate x, y, z; inoltre pongasi per brevità

$$\delta^2 = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

La proprietà delle tangenti coniugate è rappresenta dalla equazione

$$\begin{aligned} (1) \qquad & a_1\alpha(D - A\delta) + b_1\beta(E - B\delta) + c_1\gamma(F - C\delta) \\ & + (b_1\gamma + c_1\beta)(S - G\delta) + (c_1\alpha + a_1\gamma)(T - H\delta) + (a_1\beta + b_1\alpha)(U - K\delta) = 0 \end{aligned}$$

la quale deducesi facilmente da quella che dà il prof. Bordoni, pel contatto di un ordine qualunque nella nota citata. Ora sia

$$f = (p - u)^2 + (q - v)^2 + (r - w)^2 - k^2 = 0$$

essendo u, v, w parametri arbitrari; in questo caso l'equazione (1) diviene

$$\begin{aligned} (2) \qquad & \frac{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}{k}\cos e = Aa_1\alpha + Bb_1\beta + Cc_1\gamma \\ & + G(b_1\gamma + c_1\beta) + H(c_1\alpha + a_1\gamma) + K(a_1\beta + b_1\alpha) \end{aligned}$$

ove e sia l'angolo che la retta tangente la linea (a) comprende colla retta tangente la caratteristica della superficie inviluppante le sfere che toccano la superficie data lungo la linea (a). Le due rette tangenti nominate si possono chiamare *sfero-coniugate*. Siano r_1 ed r_2 i raggi di curvatura delle sezioni normali alla superficie data e tangenti la linea (a) e la caratteristica considerata, nel punto ad esse comune; e siano R_1 ed R_2 i raggi di massima e minima curvatura corrispondenti al punto stesso. Avremo quindi, com'è noto,

$$\frac{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}{r_1} = Aa_1^2 + Bb_1^2 + Cc_1^2 + 2Gb_1c_1 + 2Ha_1c_1 + 2Ka_1b_1$$

$$\frac{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}{r_2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2G\beta\gamma + 2H\gamma\alpha + 2K\alpha\beta:$$

da queste due equazioni e dalla (2) deducesi immediatamente

$$\frac{(X^2+Y^2+Z^2)^2}{\operatorname{sen}^2 e}\left(\frac{1}{r_2 r_1}-\frac{\cos^2 e}{k^2}\right)=\begin{vmatrix} X & A & K & H \\ Y & K & B & G \\ Z & H & G & C \\ 0 & X & Y & Z \end{vmatrix}$$

ossia

$$\frac{1}{r_2 r_1}=\frac{\cos^2 e}{k^2}+\frac{\operatorname{sen}^2 e}{R_1 R_2}.$$

Se poi chiamansi θ e θ_1 gli angoli che le tangenti sfero-coniugate fanno con una delle due linee di curvatura della superficie data, corrispondenti al punto di coordinate x, y, z, l'equazione precedente si muta in quest'altra

$$\operatorname{tang}\theta \,.\, \operatorname{tang}\theta_1=\frac{\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{k}}{\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{R_2}},$$

quindi concludiamo il seguente

Teorema. Il prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli che due linee a tangenti sfero-coniugate esistenti sopra una superficie comprendono con una linea di curvatura, è una quantità costante per uno stesso punto della superficie.

. . . .

Pavia, il 3 settembre 1855.